

## Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί  $\Delta$  και  $\delta$ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί  $\pi$  και  $\upsilon$ , έτσι ώστε να ισχύει:  $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$
- Ο αριθμός  $\Delta$  λέγεται **διααιρετός**, ο  $\delta$  λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός  $\pi$  ονομάζεται **πηλίκο** και το  $\upsilon$  **υπόλοιπο** της διαίρεσης.
- Το υπόλοιπο είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και πάντα μικρότερος του διαιρέτη:  $0 \leq \upsilon < \delta$



- Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται Ευκλείδεια Διαίρεση.
- Αν το υπόλοιπο  $\upsilon$  είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία Τέλεια Διαίρεση:  $\Delta = \delta \cdot \pi$
- Στους φυσικούς αριθμούς η τέλεια διαίρεση είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού, όπως είναι και η αφαίρεση πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης

- Ο διαιρέτης  $\delta$  μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0.
- Όταν  $\Delta = \delta$ , τότε το πηλίκο  $\pi = 1$
- Όταν ο διαιρέτης  $\delta = 1$ , τότε το πηλίκο  $\pi = \Delta$
- Όταν ο διααιρετός  $\Delta = 0$ , τότε το πηλίκο  $\pi = 0$

$$\begin{aligned}\delta &\neq 0 \\ a &: a \\ a : 1 &= a \\ 0 : a &= 0\end{aligned}$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1) Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν "Ευκλείδεια διαίρεση";  
(α)  $120 = 28 \cdot 4 + 8$  (β)  $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$  (γ)  $374 = 8 \cdot 46 + 6$

- Λύση: (α) Έχουμε  $\upsilon = 8$ , που είναι μικρότερος από το 28 και μεγαλύτερος από το 4. Άρα, είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 28 και όχι το 4.
- (β) Έχουμε  $\upsilon = 106$ , που είναι μεγαλύτερος από το 59 και από το 21. Άρα δεν είναι υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 59 ή το

21.

- (γ) Έχουμε  $v = 6$ , που είναι μικρότερος από το 8 και από το 48.  
Άρα είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 46 είτε το 8.

- 2) Σε μια δισκέτα μπορούν να αποθηκευτούν 11 φωτογραφίες, (α) Πόσες δισκέτες χρειάζονται για να αποθηκευτούν 5 φιλμ των 36 στάσεων το καθένα; (β) Για πόσες φωτογραφίες θα μείνει χώρος στην τελευταία δισκέτα;

- Λύση: (α) Τα 5 φιλμ των 36 στάσεων το καθένα έχουν συνολικά  $5 \cdot 36 = 180$  φωτογραφίες. Η διαίρεση των 180 φωτογραφιών με τις 11 που μπορούν να αποθηκευτούν σε μια δισκέτα, έχει πηλίκο 16 και υπόλοιπο 4, δηλαδή έχουμε  $180 = 11 \cdot 16 + 4$   
Έτσι, χρειαζόμαστε 16 δισκέτες, περισσεύουν όμως 4 φωτογραφίες ακόμη, επομένως, θα πρέπει να πάρουμε επιπλέον μία δισκέτα, άρα θα χρειασθούν  $16 + 1 = 17$  δισκέτες
- (β) Αφού στην τελευταία δισκέτα θα αποθηκευτούν οι 4 φωτογραφίες, που περίσσεψαν, θα μείνει χώρος για  $11 - 4 = 7$  φωτογραφίες.

### ΜΚΔ - ΕΚΠ

- **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού  $a$  είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του  $0, a, 2a, 3a, 4a \dots$  με όλους τους φυσικούς αριθμούς.
  - ο **Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.**
  - ο **Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.**
  - ο **Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.**
- Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
- **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού  $a$  λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
  - ο **Κάθε αριθμός  $a$  έχει διαιρέτες του αριθμούς 1 και  $a$ .**
- Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο φυσικοί αριθμοί  $a$  και  $b$  μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των  $a$  και  $b$  και συμβολίζεται **ΜΚΔ( $a, b$ )**.

- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι  **$\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$** .

## Κριτήρια Διαιρετότητας

- **Κριτήρια Διαιρετότητας** με **2, 3, 4, 5, 9, 10** ή **25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.
  - ο Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν λήγει σε **ένα μηδενικό**.
  - ο Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
  - ο Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5**.
  - ο Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
  - ο Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία του** είναι μηδέν.

Ασκήσεις:

- 1) Να υπολογίσεις: (α) Πόσο κοστίζει το 1 μέτρο υφάσματος αν τα 5 μέτρα κοστίζουν 65 €; (β) Πόσο κοστίζει το 1 κιλό κρέας αν για τα 3 κιλά πληρώσαμε 30 €; (γ) Πόσα δοχεία των 52 λίτρων θα χρειαστούν για 46.592 λίτρα κρασιού;
- 2) Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις:  
 (α)  $125 = 35 \cdot 3 + 20$ , (β)  $762 = 38 \cdot 19 + 40$ , (γ)  $1500 = 42 \cdot 35 + 30$ , (δ)  $300 = 18 \cdot 16 + 12$
- 3) Αν ο  $n$  είναι φυσικός αριθμός, ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης  $n:8$ ;
- 4) Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 9 δίνει πηλίκο 73 και υπόλοιπο 4. Ποιος είναι ο αριθμός;
- 5) Αν σήμερα είναι Τρίτη, τι μέρα θα είναι μετά από 247 ημέρες;
- 6) Συμπλήρωσε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9:  
 (α)  $6 \square 4$ , (β)  $95 \square 4$ , (γ)  $601 \square$ .

7) Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

- (α)  $\text{ΕΚΠ}(3, 5) = 8 \square 9 \square 15 \square 30 \square$
- (β)  $\text{ΕΚΠ}(11, 6) = 17 \square 36 \square 66 \square 132 \square$

(γ)	$EKP(5, 10) = 10$	<input type="text"/>	$15$	<input type="text"/>	$45$	<input type="text"/>	$50$	<input type="text"/>
(δ)	$EKP(3, 2, 5) = 15$	<input type="text"/>	$20$	<input type="text"/>	$30$	<input type="text"/>	$60$	<input type="text"/>
(ε)	$EKP(3, 6, 9) = 9$	<input type="text"/>	$18$	<input type="text"/>	$36$	<input type="text"/>	$27$	<input type="text"/>
(στ)	$EKP(8, 12, 15) = 15$	<input type="text"/>	$30$	<input type="text"/>	$30$	<input type="text"/>	$120$	<input type="text"/>
	$=$	<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>

8) Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια ενώ η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;

9) Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της α' γυμνασίου ανά 3, ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι ήταν οι μαθητές της α' γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;

10) Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεών τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;

11) Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24. Να δικαιολογήσεις γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.

12) Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;